Introduction à la programmation
Travaux pratiques: série d'exercices
INFO0201-1

B. Baert & F. Ludewig
Bruno.Baert@ulg.ac.be - F.Ludewig@ulg.ac.be

Université de Liège

Exercices

1. Convergence d'une série :
   Le nombre d'Euler e peut-être calculé à partir de la série suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \cdots$$

   - Ecrire un programme qui calcule e avec un nombre de termes tel que le dernier incrément $\frac{1}{i!}$ soit inférieur à 10^{-9}.

2. Décomposition binaire :
   Ecrire un programme qui décompose un nombre entier décimal en nombre binaire et place la valeur de chacun des bits dans un tableau. Le stockage sous forme *little endian* (bits de poid faible à gauche) sera utilisé.
   - Entrer un nombre entier au clavier ;
   - Diviser successivement ce nombre par 2 :
     - Si le reste de la division entière est nul, placer un '0' à la place du bit correspondant ;
     - Si le reste de la division entière est non nul, placer un '1'.
   - Afficher le nombre binaire.

Exercices

3. Multiplication matricielle
   - Ecrire un programme qui calcule le produit matriciel de deux matrices de dimension 5×5 et place le résultat dans une troisième matrice ;
   - Calculer le produit matriciel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 25 & 24 & 23 & 22 & 21 \end{bmatrix}$$

   et afficher le résultat à l'écran.

Rappel : le produit matriciel de deux matrices A($m \times n$) et B($n \times p$) consiste à construire une troisième matrice C($m \times p$) dont l'élément c_{ij} est donné par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

où a_{ij} et b_{ij} sont les éléments de A et B, respectivement.

Exercices

4. Evaluation d'un polynôme :
   Ecrire un programme qui évalue un polynôme $P(x)$ de degré n pour une certaine valeur x.
   - Le programme recevra en entrée le degré du polynôme, les différents coefficients de polynôme, et la valeur x pour laquelle évaluer le polynôme ;
   - Le programme affichera ensuite la valeur de $P(x)$;
   - Afficher la valeur de $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 2$ pour $x = 7$.
5. Calculs avec des vecteurs :
   - Ecrire une fonction prenant en paramètres 2 vecteurs de l'espace (3 composantes) et qui calcule leur produit scalaire ;
   - Ecrire une fonction prenant en paramètres 3 vecteurs de l'espace, qui calcule le produit vectoriel des deux premiers et place le résultat dans le troisième vecteur ;
   - Appliquer ces fonctions aux vecteurs $(10, 5, 5)$, $(-2, 2, 2)$ et $(3, 6, 1)$ et afficher les résultats.

6. Problème de cinématique simple - rebonds d'une balle :
Une balle lâchée d'une hauteur initiale h_0 tombe et rebondit plusieurs fois. La vitesse atteinte lors de l'impact au sol est $v_0 = \sqrt{2gh_0}$, et on considère qu'elle rebondit avec une vitesse $v_1 = \epsilon v_0$, où ϵ est le coefficient de restitution du sol. La nouvelle hauteur atteinte est alors $h = v_1^2/(2g)$. En fonction des paramètres que sont la hauteur initiale h_0 et le coefficient ϵ :

- Ecrire une fonction calculant la hauteur atteinte après n rebonds ;
- Ecrire une fonction calculant le nombre de rebonds nécessaire avant que la hauteur atteinte soit inférieure à y mètres ;
- Pour une hauteur initiale de 10 m et un coefficient $\epsilon = 0.85$, calculer et afficher
    - la hauteur atteinte après 4 rebonds ;
    - le nombre de rebonds avant que la hauteur de rebond soit inférieure à 1 cm.

7. Calcul d'intégrale numérique :
   Calculer numériquement l'intégrale au sens de Riemann : on utilisera pour cela une approximation de l'aire sous la courbe de la fonction par des rectangles de largeur uniforme ϵ.
   - Ecrire une fonction calculant l'intégrale de $\cos(2x)$ dans l'intervalle $[a, b]$ pour une valeur de ϵ paramétrable ;
   - Ecrire une fonction évaluant la valeur $P(x)$ d'un polynôme P de degré n de manière **efficace**. Pour ce faire, la fonction recevra en paramètres un tableau avec les coefficients du polynôme, le degré n du polynôme et le nombre x pour lequel évaluer le polynôme ;
   - Ecrire une fonction calculant l'intégrale du polynôme P de degré n dans l'intervalle $[a, b]$ pour une valeur de ϵ paramétrable. Pour y parvenir, la fonction recevra en paramètres un tableau contenant les coefficients du polynôme, le degré du polynôme, l'intervalle dans lequel calculer l'intégrale et la largeur ϵ des rectangles à utiliser ;
   - Calculer l'intégrale de $\cos(2x)$ dans l'intervalle $[0, \pi/4]$ pour des valeurs de ϵ égales à 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 et 0.00001 ;
   - Calculer l'intégrale du polynôme $7x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 5x + 7$ dans l'intervalle $[0; 10]$ pour $\epsilon = 0.001$. Comparer en évaluant le polynôme qui correspond à la primitive de $7x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 5x + 7$.

8. Crible d'Eratosthène

Le crible d'Eratosthène est un procédé permettant de trouver les nombres premiers compris entre 2 et N. Pour ce faire, dans un tableau contenant tous les nombres de 2 à N, on supprime successivement tous les multiples d'un nombre entier. A la fin, il ne reste donc que les nombres qui ne sont multiples d'aucun autre entier. On commence ainsi par supprimer tous les multiples de 2. On supprime ensuite les multiples du plus petit entier restant suivant (3) et ainsi de suite. On s'arrête lorsqu'un entier $>= \sqrt{N}$ est atteint.

- Ecrire une fonction qui prend comme paramètre un tableau de dimension N et, par la méthode du crible d'Eratosthène, ne laisse dans le tableau que les nombres premiers ;
- Ecrire un programme qui affiche les nombres premiers compris entre 0 et 100 ;

9. Nombres et facteurs premiers :
   - Méthode modulo :
     - Ecrire une fonction qui prend comme paramètre un nombre entier x. A l'aide de la fonction modulo, tester tous les facteurs possibles du nombre x pour déterminer s'il est premier.
     - Si x est premier, la fonction affiche "Le nombre x est premier" ;
     - Si x n'est pas premier, la fonction affiche les facteurs premiers du nombre x.
   - Crible d'Eratosthène :
     - Modifier l'exercice précédent pour utiliser la méthode du crible d'Eratosthène afin de déterminer si un nombre est premier et s'il ne l'est pas, quels sont ses facteurs premiers.
   - Déterminer à l'aide des deux méthodes si les nombres 18 753, 6 127 697 et 326 707 725 069 sont premiers. Comparer les temps d'exécution pour chacune des méthodes.