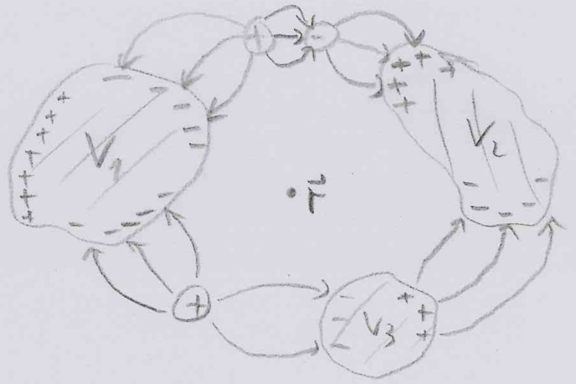
$V_1, \dots, V_N \subset \mathbb{R}^3$: volumes métalliques (compacts)

$(V_i \cap V_j = \emptyset$ pour $i \neq j)$



Conditions de bord :

- $\Phi(\vec{r}) = \Phi_j$ constant pour $\vec{r} \in V_j$
- $\Phi(\vec{r}) \to 0$ pour $r \to \infty$

$\Rightarrow$ La solution de l'équation de Poisson $\Delta \Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})$ est uniquement définie

Solution générale avec sa <u>fonction de Green</u> $G(\vec{r}, \vec{r}')$

Elle satisfait $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv \boxed{\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')}$

avec les conditions de bord

- $G(\vec{r}, \vec{r}') \to 0$ pour $\vec{r} \to \partial V_j$ et $\vec{r}' \not\to \partial V_j$ $\quad (j = 1 \dots N)$
- $G(\vec{r}, \vec{r}') \to 0$ pour $r \to \infty$, r' fini

En l'absence des surfaces métalliques :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = G(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d^3r' \, G(\vec{r}, \vec{r}') \, \rho(\vec{r}')$$

En la présence des surfaces métalliques :

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_N)} d^3r' \, G(\vec{r}, \vec{r}') \, \rho(\vec{r}') - \sum_{j=1}^{N} \Phi_j \oiint_{\partial V_j} \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') \cdot d\vec{S}_j$$

Lemma: $G(\vec r,\vec r') = G(\vec r',\vec r)$ pour $\vec r, \vec r' \in \bar V \equiv \mathbb{R}^3 \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_N)$

$$G(\vec r,\vec r') - G(\vec r',\vec r) = \int_{\bar V} d^3q \left[G(\vec q,\vec r')\,\delta(\vec q-\vec r) - G(\vec q,\vec r)\,\delta(\vec q-\vec r') \right]$$

$$= \int_{\bar V} d^3q \left[G(\vec q,\vec r')\frac{\partial^2}{\partial q^2} G(\vec q,\vec r) - G(\vec q,\vec r)\frac{\partial^2}{\partial q^2} G(\vec q,\vec r') \right]$$

$$\underset{\text{de Green}}{\overset{\text{identité}}{=}} \oiint_{\partial \bar V} \left[\underbrace{G(\vec q,\vec r')}_{=0}\frac{\partial}{\partial \vec q} G(\vec q,\vec r) - \underbrace{G(\vec q,\vec r)}_{=0}\frac{\partial}{\partial \vec q} G(\vec q,\vec r') \right]\cdot d\vec S_q = 0$$

$$\Delta \Phi(\vec r) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\bar V} d^3r'\, \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} G(\vec r,\vec r')}_{\delta(\vec r-\vec r')}\, \rho(\vec r') - \sum_j \Phi_j \oiint_{\partial V_j} \frac{\partial}{\partial \vec r'} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} G(\vec r,\vec r')}_{=\delta(\vec r-\vec r')}\cdot d\vec S_j'$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\vec r) \quad \text{pour } \vec r \in \bar V$$

$$\vec r \longrightarrow \partial V_i \implies \rho(\vec r) \longrightarrow 0$$

$$\int_{\bar V} d^3r'\, G(\vec r,\vec r')\,\rho(\vec r') \longrightarrow 0$$

$$\oiint_{\partial V_j} \frac{\partial}{\partial \vec r'} G(\vec r,\vec r')\cdot d\vec S_j \longrightarrow 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

$$\implies \Phi(\vec r) \underset{}{\overset{\vec r \to \partial V_i}{=}} -\Phi_i \oiint_{\partial V_i} \frac{\partial}{\partial \vec r'} G(\vec r,\vec r')\cdot d\vec S_i$$

$$= +\Phi_i \int_{\bar V} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r'^2} \underbrace{G(\vec r,\vec r')}_{G(\vec r',\vec r)}}_{\delta(\vec r-\vec r')} \cdot d^3r' = \Phi_i$$

→ on sépare l'aspect géométrique du problème (contenu dans G) de son aspect électrostatique (contenu dans ρ, Φ_i)